MATHEMATICS

VERALLGEMEINERUNG EINER INTEGRALTRANSFORMATION VON MEHLER–FOCK DURCH DEN VON KUIPERS UND MEULENBELD EINGEFÜHRTEN KERN $P_k^{m,n}(z)$

VON

F. GÖTZE

(Communicated by Prof. A. C. ZAANEN at the meeting of January 30, 1965)

1. *Einleitung*

VON MEHLER [6] wurde 1881 eine Integraltransformation erwähnt, die eine Umkehrformel besitzt. Der Integralkern besteht hierbei aus einer Kugelfunktion $P_k(z)$ mit $\mathrm{Re}(k) = -\frac{1}{2}$. Durch Arbeiten von FOCK [2] und VILENKIN [8] ist die Mehlertransformation abermals zum Gegenstand mathematischer Forschung geworden. Dabei gibt FOCK in [2] hinreichende Bedingungen für die Existenz des Umkehrintegrals, während Vilenkin das Mehlersche Ergebnis auf den Kern $P_k^m(z)$ ausdehnt.

An diese Resultate anknüpfend beschäftigt sich die vorliegende Note mit einer weiteren Verallgemeinerung der Umkehrformeln, wo als Kern die durch KUIPERS und MEULENBELD [3] eingeführte, von drei komplexen Parametern k, m, n abhängende Funktion $P_k^{m,n}(z)$ erscheint. Sie ist Lösung der zur Fuchsschen Klasse gehörenden verallgemeinerten Legendreschen Differentialgleichung

$$(1) \qquad (1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\} w = 0$$

und besitzt die Darstellung [3]

$$(2) \qquad \begin{cases} P_k^{m,n}(z) = \\ = \dfrac{1}{\Gamma(1-m)} \cdot \dfrac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}\, F\left(k - \dfrac{m-n}{2} + 1,\ -k - \dfrac{m-n}{2};\ 1-m;\ \dfrac{1-z}{2}\right) \\ \qquad\qquad (|\mathrm{arc}\,(z \pm 1)| < \pi, \quad |z-1| < 2, \quad m \neq 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Durch analytische Fortsetzung der hypergeometrischen Funktion gewinnt man hieraus nach [4] zum Beispiel

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_k^{m,n}(z) &= \frac{2^{-k-a}\,\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k-a+1)\,\Gamma(k-b+1)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m/2}(z+1)^k\,\cdot\\
&\qquad\cdot F\left(-k-a,\ -k-b;\ -2k;\ \frac{2}{z+1}\right)+\\
&+\frac{2^{k-a+1}\,\Gamma(-2k-1)}{\Gamma(-k-a)\,\Gamma(-k-b)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{m/2}(z+1)^{-k-1}\,\cdot\\
&\qquad\cdot F\left(k-a+1,\ k-b+1;\ 2k+2;\ \frac{2}{z+1}\right)\\
&\qquad(|\mathrm{arc}\,(z\pm 1)|<\pi,\quad |z+1|>2,\quad 2k\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

wo abkürzend gesetzt wurde

$$
(3')\qquad \frac{m-n}{2}=a,\qquad \frac{m+n}{2}=b.
$$

Wir brauchen weiterhin die Ableitung einer verallgemeinerten Kugelfunktion nach dem Argument z. Mit den Bezeichnungen (3′) gilt hierfür die in [5] bewiesene Formel

$$
(4)\qquad \frac{d}{dz}P_k^{m,n}(z)=\frac{(k+b)\,(k-b+1)}{\sqrt{z^2-1}}P_k^{m-1,n-1}(z)-\frac{a+bz}{z^2-1}P_k^{m,n}(z).
$$

2. *Asymptotische Entwicklungen:*

Das Verhalten von $P_k^{m,n}(z)$ für große Werte $|z|$, welches später benutzt wird, ist vermöge (3) in der Gestalt

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_k^{m,n}(z) &= \left[\frac{2^{-a}\,\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k-a+1)\,\Gamma(k-b+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}+\right.\\
&\left.+\frac{2^{-a}\,\Gamma(-2k-1)}{\Gamma(-k-a)\,\Gamma(-k-b)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-k-1}\right]\left\{1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\\
&\qquad(|\mathrm{arc}\,z|<\pi,\quad |z|\gg 1,\quad 2k\neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)
\end{aligned}
\right.
$$

angebbar.

Um auch $P_k^{m,n}(z)$ mit $z>1$, $\mathrm{Re}(k)=-\frac{1}{2}$ für große Werte des Imaginärteils von k beurteilen zu können, verwenden wir aus [1] die asymptotische Entwicklung der hypergeometrischen Funktion

$$
\begin{aligned}
F\left(\alpha+\lambda,\ \beta-\lambda;\ \gamma;\ \frac{1-z}{2}\right) &=\\
&=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\beta+\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\gamma-\beta+\lambda)}\,2^{\alpha+\beta-1}(1-e^{-\xi})^{-\gamma+\frac{1}{2}}(1+e^{-\xi})^{\gamma-\alpha-\beta-\frac{1}{2}}\,\cdot\\
&\qquad\cdot\,\lambda^{-\frac{1}{2}}\left[e^{(\lambda-\beta)\xi}+e^{\pi i(\gamma-\frac{1}{2})-(\lambda+\alpha)\xi}\right]\left\{1+O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)\right\}\\
&\qquad(1<z=\mathrm{ch}\,\xi,\quad \mathrm{Re}\,(\lambda)>0).
\end{aligned}
$$

Übertragen auf die verallgemeinerte Legendresche Funktion (2) ergibt sich mit (3′) und den Bezeichnungen

$$\lambda = k+1, \quad \alpha = -\frac{m-n}{2}, \quad \beta = 1-\frac{m-n}{2}, \quad \gamma = 1-m$$

die folgende Entwicklung

$$(6) \quad \begin{cases} P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\xi) = \dfrac{\Gamma(k+a+1)}{\Gamma(k-b+1)}\, 2^{-a}[2\pi(k+1)\operatorname{sh}\xi]^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ \qquad \cdot\, [e^{(k+\frac{1}{2})\xi} + e^{-\pi i(m-\frac{1}{2})-(k+\frac{1}{2})\xi}]\left\{1+O\left(\dfrac{1}{|k|}\right)\right\} \\ \qquad\qquad (\xi>0, \quad \operatorname{Re}(k)>-1). \end{cases}$$

Hieraus resultiert für den uns interessierenden Fall $k=-\frac{1}{2}+is$, s reell, unter Benutzung der Stirlingschen Asymptotik der Grammafunktion

$$(6') \quad \begin{cases} P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(\operatorname{ch}\xi) = 2^{-a}s^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{2}{\pi\operatorname{sh}\xi}}\cos\left[s\xi+\dfrac{\pi}{4}(2m-1)\right]\left\{1+O\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\} \\ \qquad (\xi>0, \quad s \text{ reell}, \quad m, n \text{ beliebig komplex}). \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann nun mit der Herleitung der Umkehrformeln begonnen werden. Dabei ist für unser Vorgehen eine Arbeit VAN NOSTRAND's richtungsweisend, der in [7] – dort jedoch mit einer völlig anderen Zielstellung – ähnliche Überlegungen angestellt hat.

3. *Herleitung der Inversionsformeln*:

Es seien r, s, z reell, $z>1$, und m, n beliebig komplex. Die Funktionen

$$(7) \qquad u = P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z), \quad v = P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)$$

genügen dann bzw. gemäß (1) den verallgemeinerten Legendreschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{du}{dz}\right] + \left[(\tfrac{1}{2}+ir)(\tfrac{1}{2}-ir) + \frac{m}{2(1-z)} + \frac{n}{2(1+z)}\right]u = 0$$

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{dv}{dz}\right] + \left[(\tfrac{1}{2}+is)(\tfrac{1}{2}-is) + \frac{m}{2(1-z)} + \frac{n}{2(1+z)}\right]v = 0.$$

Multipliziert man die erste mit v, die zweite mit u, subtrahiert beide Gleichungen voneinander und integriert bezüglich z von 1 bis $t>1$, so folgt:

$$(r^2-s^2)\int_1^t uv\,dz = \int_1^t \left\{\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{dv}{dz}\right]\right\} u\,dz - \int_1^t \left\{\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{du}{dz}\right]\right\} v\,dz.$$

Partielle Integration rechter Hand liefert

$$(8) \qquad (r^2-s^2)\int_1^t uv\,dz = \left[(z^2-1)\left(u\frac{dv}{dz} - v\frac{du}{dz}\right)\right]_{z=1}^{z=t}.$$

Formt man den Ausdruck in der eckigen Klammer

$$\psi(z) = (z^2-1)\left\{P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,\frac{d}{dz}\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) - P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\,\frac{d}{dz}\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\right\}$$

durch Anwendung von (4) weiter um, so erhält man nach einigen Zwischenrechnungen

$$\text{(9)}\quad \left\{\begin{aligned} \psi(z) = \sqrt{z^2-1}\,\{[(\tfrac{1}{2}-b)^2+r^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+ir}(z) - \\ - [(\tfrac{1}{2}-b)^2+s^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\}. \end{aligned}\right.$$

Die Einführung der Integrationsgrenzen nach (8) zeigt, daß $\psi(z)$ für $z=1$ Null ist, falls der Inhalt der geschweiften Klammer endlich bleibt oder sich höchstens für $z\to 1+0$ wie $O\{(z-1)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\}$ verhält ($\varepsilon>0$). Wegen dieses Wachstumsverhaltens muß m in der Halbebene $\mathrm{Re}(m)<1$ liegen, wie mit der in der Umgebung von $z=1$ geltenden Entwicklung (2) beurteilt werden kann. Also ist

$$\text{(10)}\qquad \lim_{z\to 1+0} \psi(z)=0 \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}(m)<1$$

und aus (8) ergibt sich

$$\text{(11)}\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1^t P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\,dz = \\ &\qquad = \frac{\sqrt{t^2-1}}{r^2-s^2}\,\{[(\tfrac{1}{2}-b)^2+r^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(t)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+ir}(t) - \\ &\qquad\qquad - [(\tfrac{1}{2}-b)^2+s^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(t)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+is}(t)\}. \end{aligned}\right.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit einer noch näher zu charakterisierenden Funktion $f(r)$, integrieren bezüglich r über das unendliche Intervall $0\leqslant r<\infty$ und bilden hiervon den Limes $t\to\infty$, dann ist

$$\text{(12)}\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty dr\,f(r)\int_1^t dz\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) = \\ &\qquad = \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty f(r)\,\frac{\sqrt{t^2-1}}{r^2-s^2}\,\{[(\tfrac{1}{2}-b)^2+r^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(t)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+ir}(t) - \\ &\qquad\qquad - [(\tfrac{1}{2}-b)^2+s^2]\,P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(t)\,P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+is}(t)\}\,dr. \end{aligned}\right.$$

Für's erste werde angenommen, daß alle diese Operationen zulässig sind. Im weiteren Verlauf wird an geeigneter Stelle noch genau formuliert, welche Bedingungen $f(r)$ erfüllen muß, damit (12) einen Sinn hat.

Rückgreifend auf (5) erhält man zunächst für $t\to\infty$

$$\text{(13)}\qquad P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(t) = t^{-\frac{1}{2}}[A(s)\cos(s\lg t)+B(s)\sin(s\lg t)]\ \{1+O(1/t)\},$$

wobei

$$\text{(13')}\quad \left\{\begin{aligned} A(s) &= \frac{2^{\frac{1}{2}-a+is}\,\Gamma(-2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b-is)} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a-is}\,\Gamma(2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b+is)} \\ iB(s) &= \frac{2^{\frac{1}{2}-a+is}\,\Gamma(-2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b-is)} - \frac{2^{\frac{1}{2}-a-is}\,\Gamma(2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b+is)}\,. \end{aligned}\right.$$

Mit diesen Bezeichnungen findet man außerdem die folgende Entwicklung

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
P^{m-1,n-1}_{-\frac{1}{2}+is}(t) &= t^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(\frac{1}{2}-b)A(s)-sB(s)}{(\frac{1}{2}-b)^2+s^2}\cos(s\lg t)+\right.\\
&\left.+\frac{(\frac{1}{2}-b)B(s)+sA(s)}{(\frac{1}{2}-b)^2+s^2}\sin(s\lg t)\right]\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Indem wir jetzt rechter Hand in (12) die verallgemeinerten Legendreschen Funktionen durch (13, 14) ersetzen, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty dr\, f(r)\int_1^t dz\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) =\\
&= \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty f(r)\,\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\left[\frac{sA(r)\,B(s)-rA(s)\,B(r)}{r^2-s^2}\cos(r\lg t)\cos(s\lg t)\right.\\
&\qquad+\frac{sB(r)\,B(s)+rA(r)\,A(s)}{r^2-s^2}\sin(r\lg t)\cos(s\lg t)\\
&\qquad-\frac{sA(r)\,A(s)+rB(r)\,B(s)}{r^2-s^2}\cos(r\lg t)\sin(s\lg t)\\
&\qquad\left.-\frac{sA(s)\,B(r)-rA(r)\,B(s)}{r^2-s^2}\sin(r\lg t)\sin(s\lg t)\right]\cdot\\
&\qquad\cdot\{1+O(1/t)\}\,dr.
\end{aligned}
$$

Nun strebt $\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}$ für $t\to\infty$ gegen 1 und $O\left(\frac{1}{t}\right)$ verschwindet. Berücksichtigt man dies, so folgt nach kurzer Umformung

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty dr\, f(r)\int_1^t dz\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) =\\
&= \lim_{t\to\infty}\int_0^\infty f(r)\left\{\varphi_1(r,s)\cos(r\lg t)\cos(s\lg t)\right.\\
&\qquad+\varphi_2(r,s)\sin(r\lg t)\sin(s\lg t)\\
&\qquad+\varphi_3(r,s)\cos(r\lg t)\sin(s\lg t)\\
&\qquad\left.+\varphi_4(r,s)\frac{\sin[(r-s)\lg t]}{r-s}\right\}dr.
\end{aligned}
\right.
$$

Dabei bedeuten

$$
(15')\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_1(r,s) &= \frac{sA(r)\,B(s)-rA(s)\,B(r)}{r^2-s^2}\\
\varphi_2(r,s) &= \frac{sB(r)\,B(s)+rA(r)\,A(s)}{r^2-s^2}\\
\varphi_3(r,s) &= \frac{A(r)\,A(s)-B(r)\,B(s)}{r+s}\\
\varphi_4(r,s) &= \frac{rA(r)\,A(s)+sB(r)\,B(s)}{r+s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Unter Verwendung des Riemann-Lebesgueschen Lemmas [9]

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty g(r) \begin{Bmatrix} \cos(rt) \\ \sin(rt) \end{Bmatrix} dr = 0, \tag{16}$$

wo $g(r) \in L(0, \infty)$, bleibt von der rechten Seite in (15) nur der Ausdruck mit φ_4 übrig, welcher (ohne den Limes) ein Dirichletsches Integral darstellt. Allgemein gilt nach [9] mit stetigem und in $0 \leqslant r < \infty$ absolut integrierbarem $g(r)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(r) \frac{\sin[t(r-s)]}{r-s} dr = g(s), \qquad (s > 0) \tag{17}$$

so daß (15) hiernach in

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty dr\, f(r) \int_1^t dz\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) = \frac{\pi}{2} [A^2(s) + B^2(s)]\, f(s) \tag{18}$$

übergeht. Vermöge (13′) ist dabei

$$A^2(s) + B^2(s) = \frac{2^{3-2a}\, \Gamma(2is)\, \Gamma(-2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\, \Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\, \Gamma(\frac{1}{2}-b+is)\, \Gamma(\frac{1}{2}-b-is)}. \tag{19}$$

Die absolute Integrierbarkeit von $g(r)$ in (16, 17) erfordert – im Hinblick auf (15) – daß

$$f(r)\, \varphi_j(r, s) \in L(0, \infty), \qquad j = 1, 2, 3, 4. \tag{20}$$

Untersucht man das Verhalten der in (15′) definierten Funktionen $\varphi_j(r, s)$ im Gebiet $0 < r < \infty$, $0 < s < \infty$, so zeigt sich, daß die $\varphi_j(r, s)$ dort stetig und differenzierbar sind. Bei φ_1 und φ_2 müßte man zunächst noch $r \neq s$ voraussetzen, doch folgt hier die Stetigkeit z.B. für φ_1 nach l'Hospital durch die Festsetzung

$$\varphi_1(s, s) = \tfrac{1}{2} \left[A'(s)\, B(s) - A(s)\, B'(s) - \frac{A(s)\, B(s)}{s} \right].$$

Weiterhin findet man

$$\varphi_j(r,s) = \begin{cases} O(r^{-1}) & \text{für } r \to 0 \\ O(r^{m-\frac{1}{2}}) & \text{für } r \to \infty. \end{cases}$$

Wegen Bedingung (20) ist $f(r)$ deshalb in den Intervallenden größenordnungsmäßig durch

$$f(r) = O(r^{\delta}) \qquad \text{für } r \to 0 \tag{21}$$

$$f(r) = O(r^{-m-\varepsilon-\frac{1}{2}}) \text{ für } r \to \infty \tag{21′}$$

einzuschränken (δ, ε beliebig positiv).

Rückkehrend zu (18) bemerken wir, daß dort der Limes nicht unter das Integral gezogen werden darf, denn gemäß (13) verhält sich der Integrand in (18) für große z wie $O(z^{-1})$, weshalb das innere Integral für $t \to \infty$ nicht konvergent wäre. Jedoch können wir zuvor unter der Voraussetzung $f(r) \in L(0, \infty)$ die Integrationsfolge vertauschen, wenn m, was mit (10) verträglich ist, auf die Halbebene $\mathrm{Re}(m) < \frac{1}{2}$ eingeschränkt wird. Man erkennt nämlich an Hand der asymptotischen Entwicklung (6′), daß mit $f(r)$ auch $f(r) P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z)$ für $r \to \infty$ – in Übereinstimmung mit (21′) – absolut integrierbar ist, falls $\mathrm{Re}(m) < \frac{1}{2}$.

Es ergibt sich also

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_1^\infty dz\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z) \int_0^\infty dr\, f(r)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+ir}(z) = \\ &= \frac{\pi f(s)}{4^{a-1}} \cdot \frac{\Gamma(2is)\,\Gamma(-2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b-is)}. \end{aligned} \right.$$

(22) stellt ein Analogon zur Fourierschen Integralformel dar. Es handelt sich hier um die Zerlegung einer Funktion $f(s)$ in ein Integral nach verallgemeinerten Legendreschen Funktionen. Benennt man in (22) das innere Integral durch $F(z)$, so läßt sich die Integralzerlegung in ein Paar von Umkehrformeln aufspalten:

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} f(s) = \frac{4^{a-1}}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b-is)}{\Gamma(2is)\,\Gamma(-2is)} \cdot \\ \cdot \int_1^\infty F(z)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\, dz. \end{aligned} \right.$$

$$(23') \qquad F(z) = \int_0^\infty f(s)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\, ds.$$

Wie aus (2) leicht festzustellen, ist nun $P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)$ eine in s gerade Funktion. Diese Eigenschaft überträgt sich gemäß (23) deshalb auch auf $f(s)$ und es gilt $f(s) = f(-s)$. Berücksichtigt man noch das Verhalten von $f(s)$ bei $s = 0$ durch die zu (21) äquivalente Aussage $f(0) = 0$, so läßt sich abschließend der folgende Satz formulieren:

Satz 1: $f(s)$ sei in $0 \leq s < \infty$ stetig und habe die Eigenschaften

1) $f(s) = f(-s)$
2) $f(0) = 0$
3) $f(s) \in L(0, \infty)$.

Sind dann m, n beliebig komplex und $\mathrm{Re}(m) < \frac{1}{2}$, so existiert

$$F(z) = \int_0^\infty f(s)\, P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z)\, ds, \qquad (1 < z < \infty)$$

und es gilt die Umkehrformel (23).

Bei Ausdehnung der Bedingungen auf stückweise stetige Funktionen mit endlichen Sprungstellen ist $f(s)$ in der Inversionsformel durch

$$\frac{f(s+o) + f(s-o)}{2}$$

zu ersetzen.

Mittels der Umbezeichnungen

$$\left[\pi 4^{1-a} \frac{\Gamma(2is)\,\Gamma(-2is)}{\Gamma(\frac{1}{2}-a+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-a-is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-b-is)}\right]^{\frac{1}{2}} f(s) = g(s)$$

$$F(z) = G(z)$$

kann den Umkehrformeln auch eine symmetrische Gestalt gegeben werden. Wir formulieren dies in dem

Satz 2: Es sei $g(s)$ eine in $0<s<\infty$ stetige Funktion mit den Eigenschaften

1) $g(s)=g(-s)$
2) $g(s) \in L(0, 1)$
3) $g(s)s^{\frac{1}{2}-m} \in L(1, \infty)$.

Sind dann m, n beliebig komplex und $\mathrm{Re}(m)<\frac{1}{2}$, so konvergiert

$$G(z) = \int_0^\infty g(s)\, K\binom{z}{s};\, m, n\Big)\, ds, \qquad (1<z<\infty)$$

und es gilt die Umkehrformel

$$g(s) = \int_1^\infty G(z)\, K\binom{z}{s};\, m, n\Big)\, dz,$$

wo der Kern die Gestalt hat

$$K\left(\begin{matrix} z \\ s \end{matrix};\, m, n\right) = \left[\frac{2^{m-n}}{4\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1-m+n}{2}+is\right)\Gamma\left(\frac{1-m+n}{2}-is\right)\Gamma\left(\frac{1-m-n}{2}+is\right)\Gamma\left(\frac{1-m-n}{2}-is\right)}{\Gamma(2is)\,\Gamma(-2is)}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot P^{m,n}_{-\frac{1}{2}+is}(z).$$

Für $n=m$ vereinfacht sich der Kern unter Verwendung bekannter Beziehungen für die Gammafunktion zu

$$K\left(\begin{matrix} z \\ s \end{matrix};\, m\right) = \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-m+is)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-is)}{\Gamma(is)\,\Gamma(-is)}\right]^{\frac{1}{2}} P^{m}_{-\frac{1}{2}+is}(z).$$

Rechts steht die einfache zugeordnete Funktion von Legendre. Mit diesem Kern finden sich die entsprechenden Inversionsformeln bei Vilenkin [8], die hier ihre sinnvolle Verallgemeinerung gefunden haben. Schließlich sei noch mit $m=n=0$ der von Mehler [6] behandelte Fall genannt, wo die Kernfunktion

$$K\left(\begin{matrix} z \\ s \end{matrix}\right) = \sqrt{s \tanh(\pi s)}\, P_{-\frac{1}{2}+is}(z).$$

ist.

LITERATUR

1. Bateman, H., Higher transcendental functions, vol. I, pp. 77–78 (1953), New York–Toronto–London.
2. Fock, V. A., Über die Zerlegung einer willkürlichen Funktion in ein Integral nach Legendreschen Funktionen mit komplexem Index (Russ.), Dokl. Akad. Nauk SSSR 39, 279–283 (1943).
3. Kuipers, L. and B. Meulenbeld, On a generalization of Legendre's associated differential equation I, Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A 60**, 436–443 (1957).
4. ——— and ———, Linear transformations of generalized Legendre's associated functions, Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. **A 61**, 328–331 (1958).
5. ———, Relations between continguous generalized Legendre associated functions (recurrence formulas), Math. Scand. **6**, 200–206 (1958).
6. Mehler, F. G., Über eine mit den Kugel- und Zylinderfunktionen verwandte Funktion und ihre Anwendung in der Theorie der Elektrizitätsverteilung, Math. Ann. **18**, 161–194 (1881).
7. Van Nostrand, R. G., The orthogonality of the hyperboloid functions, Journ. Math. and Phys. 33, 276–282 (1954).
8. Vilenkin, N. I., The matrix elements of irreducible unitary representations of a group of Lobatchevsky space motions and the generalized Fock–Mehler transformations, Dokl. Akad. Nauk SSSR **118**, 219–222 (1958) (Russ.).
9. Whittaker–Watson, A course of modern analysis, Cambridge, pp. 172, 188 (1920).